

2023

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

[Symbols have their usual meaning.]

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

১। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ ।

এখানে L'Hospital-এর নিয়ম প্রযোজ্য কি না ব্যাখ্যা করো।

(খ) মান নির্ণয় করো : $\frac{dy}{dx}$: $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ ।

(গ) যদি $y = (x^2 - 1)^n$ হয়, তাহলে দেখাও যে $(x^2 - 1)y_2 - 2(n - 1)xy_1 - 2ny = 0$ ।

(ঘ) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$ -এই Reduction formula ব্যবহার করে $\int x^3 e^x dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) বক্ররেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার Parametric equation হচ্ছে $x = 2\sin^2 t$, $y = 3\cos^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, যেখানে t একটি parameter।

(চ) দেখাও যে $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য 12π ।

(ছ) $y = x^2$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

(ক) a এবং b -এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ ।

Please Turn Over

- (খ) $y = \sin(ax + b)$ অপেক্ষকটির n th order derivative নির্ণয় করো।
- (গ) যদি $y = \tan^{-1}x$ হয়, তাহলে দেখাও যে $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$ ।
- (ঘ) $\int \tan^n x dx$ -এর Reduction সূত্র নির্ণয় করো। এর সাহায্যে $\int \tan^4 x dx$ -এর মান নির্ণয় করো।
- (ঙ) $x = a \cos^3\theta$, $y = b \sin^3\theta$ -এই বক্রটি দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
- (চ) X -অক্ষকে অক্ষ করে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার ঘূর্ণন সৃষ্ট solid-এর আয়তন নির্ণয় করো।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

৩। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২^১/_২ × ২(ক) যদি অক্ষদ্বয়কে 45° ঘোরানো হয়, তবে $x^2 - y^2 = 25$ সমীকরণটির পরিবর্তিত সমীকরণটি নির্ণয় করো।(খ) $\frac{l}{r} = 1 - \cos\theta$ অধিবৃত্তটির উপরস্থ বিন্দুটি নির্ণয় করো যার radius vector-এর মান সর্বনিম্ন।

(গ) (2, 3, 4) বিন্দুটি নিম্নোক্ত গোলকের ভিতরে না বাইরে অবস্থিত তা নির্ণয় করো :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$$

(ঘ) শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু (0, 0, 0) এবং বক্ররেখার ভিত্তি $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ ।

৪। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬ × ৫

(ক) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।(খ) $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে, $p = \frac{1}{2}l \sec\alpha$ ।

(গ) দেখাও যে একটি উপবৃত্তের দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারণপথ একটি বৃত্ত।

(ঘ) (α, β, γ) নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সমতলটি (plane) স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে OABC

$$\text{গোলকের কেন্দ্রের সঞ্চারণপথ হবে } \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$$

(ঙ) যে গোলকের জন্য $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি একটি বৃহৎ বৃত্ত (Great Circle) হবে, সেই গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করো।(চ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ এবংযার অর্ধ-উল্লম্ব কোণ 30° ।

(3)

Z(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF

(ছ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় নলের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার ব্যাসার্ধ 2 এবং যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ ।

(জ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ -এই hyperboloid-টির generating সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি (2, 3, -4) বিন্দু দিয়ে গমন করে।

(ঝ) দেখাও যে $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z - 5 = 0$ একটি ellipsoid-এর সমীকরণ যার কেন্দ্র (1, -2, 1)।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

৫। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও : ৪×৪=১৬

২×৪

(ক) $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + d\hat{k}$ এবং $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় হলে, d ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করো।

(খ) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ বিন্দুগুলি দিয়ে একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) প্রমাণ করো যে, কোনো একটি ভেক্টর \vec{a} -এর জন্য, $\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$ ।

(ঘ) $\vec{A} = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} + t^3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \sin t\hat{i} - \cos t\hat{j}$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) দেখাও যে, $[\hat{i} + \hat{j} \hat{j} + \hat{k} \hat{k} + \hat{i}] = 2$ ।

(চ) \vec{a} এবং \vec{b} দুটি ভেক্টর এবং k যদি একটি স্কেলার হয়, তবে সেই সমস্ত ভেক্টর \vec{r} নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{r} = k$ ।

(ছ) O, Q, R এবং S চারটি বিন্দু যাদের কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। O মূল বিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, S বিন্দুগুলির position vector যদি যথাক্রমে β , γ , δ , হয়, তবে OQ এবং RS সরলরেখা দুটির ক্ষুদ্রতম দূরত্ব (shortest distance) নির্ণয় করো।

৬। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

(ক) $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ অপেক্ষকটির $P(1, 2, 3)$ বিন্দুতে PQ সরলরেখার দিকে Directional derivative নির্ণয় করো, যেখানে Q বিন্দুটি হল (5, 0, 4)।

(খ) $\vec{r} = (2a \cos t, 2a \sin t, bt^2)$ বক্রটির, দেখাও যে, $[\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}] = 8a^2bt$ ।

(গ) যদি একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{a}(t)$ ধ্রুবক দিক নির্দেশ করে, তবে দেখাও যে, $\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ ।

Please Turn Over

- (খ) একটি কণার উপর $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ প্রবল বল দুটি প্রযুক্ত হলে, কণাটি $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দু থেকে $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। তাহলে কণাটির উপর বলের কার্য নির্ণয় করো।
- (গ) ভেক্টর মেথডে দেখাও যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ একটি সমকোণ।
- (ঘ) $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ বলটি $(1, -1, 2)$ বিন্দুর উপর প্রয়োগ হলে $(2, -1, 3)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে \vec{r} -এর moment নির্ণয় করো এবং magnitude নির্ণয় করো।

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

[English Version]

*The figures in the margin indicate full marks.**[Symbols have their usual meaning.]*

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY1. Answer *any four* questions :

2×4

(a) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

Is L'Hospital's rule applicable here? Explain.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$: $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, when $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) If $y = (x^2 - 1)^n$, then show that $(x^2 - 1)y_2 - 2(n - 1)xy_1 - 2ny = 0$.

(d) Evaluate $\int x^3 e^x dx$ using the reduction formula $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$.

(e) Find the curve whose parametric equation is $x = 2\sin^2 t$, $y = 3\cos^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, where t is a parameter.(f) Show that the length of the circumference of the circle $x^2 + y^2 = 36$ is 12π .(g) Find the area bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = 2x$.2. Answer *any three* questions :

4×3

(a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$.

(b) Find the n th order derivative of the function $y = \sin(ax + b)$.

(c) If $y = \tan^{-1}x$, then show that $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n - 1)y_{n-1} = 0$.

(5)

Z(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF

- (d) Find the Reduction formula for $\int \tan^n x dx$, hence evaluate $\int \tan^4 x dx$.
- (e) Find the area enclosed by the curve $x = a \cos^3 \theta$, $y = b \sin^3 \theta$.
- (f) Find the volume of the solid generated by revolution of the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ about the X-axis.

Group - B

[Geometry]

(Marks : 35)

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

3. Answer *any two* questions :

2½×2

- (a) Transform the equation $x^2 - y^2 = 25$ when the axes are rotated through 45° .
- (b) Find the point on the parabola $\frac{l}{r} = 1 - \cos \theta$ which has the smallest radius vector.
- (c) Determine whether the point (2, 3, 4) is an outside or an inside point with respect to the sphere :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$$
- (d) Find the equation of the cone whose vertex is the point (0, 0, 0) and whose base is the curve $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$.

4. Answer *any five* questions :

6×5

- (a) Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic.
- (b) If the straight line $r \cos(\theta - \alpha) = p$ touches the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta$, then show that $p = \frac{1}{2} l \sec \alpha$.
- (c) Show that the locus of the point of intersection of a pair of perpendicular tangents to an ellipse is a circle.
- (d) A plane passing through a fixed point (α, β, γ) cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere OABC is $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$.
- (e) Find the equation of sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle.
- (f) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin, whose axis is the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has semi-vertical angle of 30° .
- (g) Find the equation of the right circular cylinder of radius 2, whose axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

Please Turn Over

- (h) Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, which pass through the point $(2, 3, -4)$.
- (i) Show that the quadric surface given by the equation $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z - 5 = 0$ is an ellipsoid whose centre is $(1, -2, 1)$.

Group - C

[Vector Analysis]

MURALIDHAR GIRLS' COLLEGE
LIBRARY

(Marks : 20)

5. Answer *any four* questions :

2×4

- (a) Determine the value of the constant d such that the vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + d\hat{k}$ and $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ are coplanar.
- (b) Find the equation of the line passing through the point $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$.
- (c) Prove that, for any proper vector \vec{a} , $\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$.
- (d) If $\vec{A} = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} + t^3\hat{k}$ and $\vec{B} = \sin t\hat{i} - \cos t\hat{j}$, find $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.
- (e) Show that $[\hat{i} + \hat{j} \quad \hat{j} + \hat{k} \quad \hat{k} + \hat{i}] = 2$.
- (f) Let \vec{a} and \vec{b} be two given vectors and let k be a given scalar. Find all vectors \vec{r} such that $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$ and $\vec{a} \cdot \vec{r} = k$.
- (g) O, Q, R and S are four points, no three of which are collinear. If β , γ , δ be the position vectors of Q, R, S respectively with O as origin, then find the shortest distance between the lines OQ and RS.

6. Answer *any three* questions :

4×3

- (a) Find the directional derivative of the function $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ at the point $P(1, 2, 3)$ in the direction of the straight line PQ , where Q is the point $(5, 0, 4)$.
- (b) For the curve $\vec{r} = (2a \cos t, 2a \sin t, bt^2)$, deduce that $[\dot{\vec{r}} \quad \ddot{\vec{r}} \quad \dddot{\vec{r}}] = 8a^2bt$.
- (c) If a vector function $\vec{a}(t)$ possesses constant direction, then show that $\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$.
- (d) A particle, acted on by constant forces $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, is displaced from the point $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ to the point $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$. Find the work done by the force on the particle.
- (e) Show by vector method that the angle on a semi-circle is a right angle.
- (f) A force $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ is applied at the point $(1, -1, 2)$. Find the moment of \vec{F} about the point $(2, -1, 3)$. Also find its magnitude.